OM SUMMATIONEN AF DE TRANSCENDENTE FUNCTIONER, HVIS DIFFERENTIALER ERE ALGEBRAISKE.

AF

CHR. JÜRGENSEN.

Ved en algebraisk Function af x ville vi her forstaae enhver rational Function af x og z, naar z betyder en Rod af en algebraisk Ligning, hvis Coefficienter ere rationale og hele Functioner af x. Det er bekjendt, at de transcendente Functioner, hvis Differentialer ere algebraiske, have den almindelige Egenskab, at Summen af et Antal af saadanne Transcendente, for hvilke de Variable ere Rödder af en vis Ligning, kan udtrykkes under endelig Form. De Sætninger, hvorved dette iværksættes, og som ligge til Grund for Læren om denne Classe af Functioner, ere, foruden den *Eulerske*, hvorpaa Læren om de elliptiske Functioner er bygget, de 3 Theoremer af *Abel*, der findes i *Crelles* Journal für die Mathematik III p. 314 f. (en mindre betydelig Udvidelse af dette, af *Jacobi* forekommer sammest. IX p. 99) VI p. 78 og IV p. 200, samt de af *Poisson*, der findes i samme Journal XII p. 89 f. Blandt disse, der saavidt jeg veed, indeholde det meest Omfattende, man i Henseende til de nævnte Transcendente kjender, give kun de to förste Udtrykket for Summen, men de angaae specielle Tilfælde; den förste er det, der sædvanligen kaldes det *Abelske* Theorem, og er paa det anförte Sted beviist; for den anden findes Beviset i en lille Afhandling, jeg for kort Tid siden havde den Ære at forelægge det Kongelige Videnskabernes Selskab. Den tredie Sætning er den almindelige, men den giver ikke Udtrykket for Summen, saalidt som de nævnte Sætninger af *Poisson*. Dette er i et Par specielle Tilfælde gjort til Gjenstand for Undersögelser af *Minding*, der findes i den anförte Journal

X p. 195 f. og XI p. 373 f. Desuden ere de nævnte Sætninger udledte paa forskjellige Maader i det specielle og i det almindelige Tilfælde.

At sammenfatte dem alle i en enkelt Formel, der med det Samme giver Udtrykket for Summen, staaer saaledes, om jeg ikke feiler, tilbage. Dette er Opgaven for den Opsats, jeg her har den Ære at forelægge Selskabet, og den Formel, der löser den, er, som det Fölgende vil vise, den samme, som jeg i min foregaaende Afhandling anvendte til at bevise den anden ovenanförte Sætning.

Vi ville först anföre denne Formel. Betegner fx en rational og heel Function af x, hvis Coefficienter ere Functioner af en anden Variabel y, er φx en lignende Function, hvilken antages oplöst i uligestore Factorer nemlig

$$\varphi x = A(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

hvor A, a_1, $a_2 \ldots a_n$ afhænge af y, og betegnes

$\left(\frac{d\varphi x}{dy}\right)$ med $\varphi' x$, samt dennes Værdi naar $x = a_i$ ved $\varphi' a_i$,

saa er, idet $H(Ft)$ betyder Coefficienten til $\frac{1}{t}$ i Udviklingen af Ft efter nedstigende Potenser af t,

$$\int \frac{fx}{\varphi x} dy = \overset{i=n}{\underset{i=1}{S}} \int \frac{fa_i}{(a_i-x)\varphi' a_i} \frac{da_i}{dy} dy + H\left\{\frac{1}{t-x}\int \frac{ft}{\varphi t} dy\right\} + C,$$

hvor C er uafhængig af y.

Dersom φx indeholder ligestore Factorer, t. E. flere Gange Factoren $x-a_i$, saa vil denne Formel lide en Modification. Ved at anvende Lign. (2.) i min ovennævnte Afhandling vil man let for dette Tilfælde danne fölgende Sætning.

Naar $\varphi x = A(x-a_1)^{\mu_1+1}(x-a_2)^{\mu_2+1}\ldots(x-a_n)^{\mu_n+1}$, saa træder $\frac{\varphi^{(\mu_i+1)} a_i}{1.2.3\ldots(\mu_i+1)(-1)^{\mu_i}} \left(\frac{dy}{da_i}\right)^{\mu_i+1}$ istedet for $\varphi' a_i . \frac{dy}{da_i}$,

idet $\varphi^{(\mu_i+1)}$ betyder $\left(\frac{d^{\mu_i+1}\varphi}{dy^{\mu_i+1}}\right)$, og man har da

$$\int \frac{fx}{\varphi x} dy = \overset{i=n}{\underset{i=1}{S}} (\mu_i+1) \int \frac{d^{\mu_i}}{da_i^{\mu_i}} \left\{ \frac{(-1)^{\mu_i} fa_i}{(a_i-x)\,\varphi^{(\mu_i+1)} a_i} \right\} \left\{ \frac{da_i}{dy} \right\}^{\mu_i+1} dy$$
$$+ H \left\{ \frac{1}{t-x} \int \frac{ft}{\varphi t} dy \right\} + C.$$

I Anvendelsen vil det være ubeqvemt at bringe Bröken $\frac{fx}{\varphi x}$ til mindst Benævning naar dens Tæller og Nævner have fælleds Factorer, hvilke i det Fölgende dog kun ville forekomme under Formen $(x-a_i)^{\mu_i}$; vi ville derfor give Ligningen en for dette Tilfælde passende Form. Hvis fx indeholder Factoren $(x-a_i)^{\mu_i}$, saa vil fa_i blive Nul. Men bemærker man, at

$$\frac{d^{\mu_i}}{da_i^{\mu_i}} \frac{(-1)^{\mu_i} fa_i}{(a_i-x)\,\varphi^{(\mu_i+1)} a_i} \text{ kan skrives saaledes: } \frac{d^{\mu_i}}{dz^{\mu_i}} \frac{(-1)^{\mu_i} fz}{(z-x)\,\varphi^{(\mu_i+1)} z}$$

naar efter Differentiationen z sættes $= a_i$, saa seer man, at Ligningen efter den bekjendte Regel for gjentagen Differentiation af en Brök reduceres til fölgende, hvor $f^{(\mu_i)}$ betyder $\left(\frac{d^{\mu_i} f}{dy^{\mu_i}}\right)$

$$\int \frac{fx}{\varphi x} dy = \overset{i=n}{\underset{i=1}{S}} (\mu_i+1) \int \frac{f^{(\mu_i)} a_i}{(a_i-x)\,\varphi^{(\mu_i+1)} a_i} \frac{da_i}{dy} dy$$
$$+ H \left\{ \frac{1}{t-x} \int \frac{ft}{\varphi t} dy \right\} + C.$$

Men $\frac{f^{(\mu_i)} a_i}{\varphi^{(\mu_i+1)} a_i}$ er efter bekjendte Regler Værdien af $\frac{fa_i}{\varphi' a_i}$ naar Tæller og Nævner i denne Brök indeholder Factoren $(x-a_i)^{\mu_i}$, denne sidste kan altsaa sættes istedetfor hiin. Videre ville i det Fölgende Integralerne under Tegnet S ikke indeholde nogen anden af y afhængig Störrelse end a_i. Ifölge disse Bemærkninger ville de to Formler kunne skrives saaledes:

$$1)\quad \int \frac{f\,x}{\varphi\,x}\,d\,y = \overset{i=n}{\underset{i=1}{S}} \int \frac{f\,a_i}{(a_i - x)\,\varphi'\,a_i}\,d\,a_i + H\left\{\frac{1}{t-x}\int \frac{f\,t}{\varphi\,t}\,dy\right\} + C,$$

$$2)\quad \int \frac{f\,x}{\varphi\,x}\,d\,y = \overset{i=n}{\underset{i=1}{S}} (\mu_i + 1) \int \frac{f\,a_i}{(a_i - x)\varphi'\,a_i}\,d\,a_i + H\left\{\frac{1}{t-x}\int \frac{f\,t}{\varphi\,t}\,dy\right\} + C.$$

Den anden af disse lader sig ogsaa umiddelbart udlede af den förste ved at antage, at flere enkelte Factorer i $\varphi\,x$ blive hinanden lige; dens Anvendelse behöver ingen særskildt Betragtning, det vil være tilstrækkeligt at vise, at Ligningen (1.) indeholder Hovedsætningerne angaaende den ovenomtalte Classe af transcendente Functioner.

Denne er indbefattet under den almindelige Form

$$\int \pi\,(x,\ z)\,d\,x,$$

hvor π er en rational Function og z betegner en Rod af Ligningen

$$Z = z^m + p_1\,z^{m-1} + p_2\,z^{m-2} + \ldots + p_{m-1}\,z + p_m = 0,$$

hvis Coefficienter $p_1, p_2, p_3 \ldots p_m$ ere rationale og hele Functioner af x og hvis Rödder være betegnede med $z_1, z_2, z_3, \ldots z_m$. Functionen π vil altid lade sig reducere til fölgende Form

$$\pi\,(x,\ z) = \frac{\lambda\,(x,\ z)}{\nu\,(x)},$$

hvor λ og ν forestille hele Functioner. For at overbevise sig herom behöver man kun at bemærke, at naar

$$\pi\,(x,\ z_1) = \frac{P_1}{Q_1},$$

idet P_1 og Q_1 ere hele Functioner af x og en Rod z_1, saa vil man, naar P_2, Q_2, P_3, Q_3 o. s. v. betyde de samme Functioner, hvori z_1 forandres til z_2, z_3 o. s. v. have

$$\pi(x, z_1) = \frac{P_1 Q_2 Q_3 \ldots Q_m}{Q_1 Q_2 Q_3 \ldots Q_m}.$$

Men Nævneren er da en heel og symmetrisk Function af Rödderne, altsaa, efter bekjendte Sætninger en rational og heel Function af Coefficienterne $p_1, p_2 \ldots p_m$ og följelig ogsaa af x. I Tælleren derimod er $Q_2 Q_3 \ldots Q_m$ en heel og symmetrisk Function af $z_2, z_3, \ldots z_m$; men denne er ogsaa en heel Function af $p_1, p_2 \ldots p_{m-1}$ og z_1, thi antages

$$z^m + p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + p_3 z^{m-3} + \ldots + p_m = (z - z_1)(z^{m-1} + s_1 z^{m-2} + s_2 z^{m-3} + \ldots + s_{m-1}),$$

saa er
$$s_1 = p_1 + z_1$$
$$s_2 = p_2 + s_1 z_1 = p_2 + p_1 z_1 + z_1^2$$
$$s_3 = p_3 + s_2 z_1 = p_3 + p_2 z_1 + p_1 z_1^2 + z_1^3$$
&c.;

altsaa er enhver heel Function af $s_1, s_2, \ldots s_{m-1}$, — og ved en saadan kan som bekjendt en heel og symmetrisk Function af $z_2 z_3 \ldots z_m$, der ere Rödder af Ligningen $z^{m-1} + s_1 z^{m-2} + s_2 z^{m-3} + \ldots + s_{m-1} = 0$, udtrykkes, — ogsaa en heel Function af Coefficienterne $p_1, p_2, \ldots p_{m-1}$, altsaa af x, og z_1. Fremdeles er P_1 en lignende Function, hvoraf fölger, at $\pi(x, z)$ altid kan sættes under den angivne Form, hvor naturligviis Graden af λ med Hensyn til z, formedelst den givne Ligning $Z = 0$ altid kan bringes ned under dennes Grad.

Vi betragte altsaa Integraler af Formen

$$\psi x = \int \frac{\lambda(x, z)}{\nu(x)} dx.$$

Forbindes Ligningen $Z = 0$ med en anden

$$\theta z = q_1 z^{m-1} + q_2 z^{m-2} + \ldots + q_{m-1} z + q_m = 0,$$

hvor $q_1, q_2, \ldots q_m$ ere Functioner af x og y, men rationale og hele med Hensyn til x, saa vil den Ligning, der fremkommer naar z elimineres, efter bekjendte Regler kunne skrives saaledes:

$$\theta z_1 \cdot \theta z_2 \cdot \theta z_3 \ldots \theta z_m = 0.$$

Man antage denne Ligning med Hensyn til x at være af n^{te} Grad og betegne dens Rödder med $a_1, a_2, \ldots a_n$. Idet $\left(\frac{d\theta}{dy}\right)$ betegnes ved θ' sætte man nu i Ligningen (1.)

$$\frac{fx}{\varphi x} = \frac{\theta' z_1}{\theta z_1} \lambda(x, z_1) + \frac{\theta' z_2}{\theta z_2} \lambda(x, z_2) + \frac{\theta' z_3}{\theta z_3} \lambda(x, z_3) + \ldots + \frac{\theta' z_m}{\theta z_m} \lambda(x, z_m),$$

hvilken Function er rational og symmetrisk med Hensyn til $z_1, z_2, \ldots z_m$, altsaa rational med Hensyn til x. Bringes den til eens Benævning, saa bliver Nævneren

$$\varphi x = \theta z_1 \cdot \theta z_2 \cdot \theta z_3 \ldots \theta z_m,$$

hvoraf $\varphi' x = \theta' z_1 \cdot \theta z_2 \cdot \theta z_3 \ldots \theta z_m + \theta' z_2 \cdot \theta z_1 \cdot \theta z_3 \ldots \theta z_m + \ldots$

Altsaa

$$\frac{fa_i}{\varphi' a_i} = \frac{\theta' z_1 \cdot \theta z_2 \cdot \theta z_3 \ldots \theta z_m \cdot \lambda(x, z_1) + \theta' z_2 \cdot \theta z_1 \cdot \theta z_3 \ldots \theta z_m \cdot \lambda(x, z_2) + \ldots}{\theta' z_1 \cdot \theta z_2 \cdot \theta z_3 \ldots \theta z_m \qquad + \theta' z_2 \cdot \theta z_1 \cdot \theta z_3 \ldots \theta z_m \qquad + \ldots},$$

hvor paa höire Side af Lighedstegnet x sættes $= a_i$. Herved forsvinder φx, altsaa i det mindste een af Factorerne θz_1, θz_2 o. s. v., fölgelig bliver

$$\frac{fa_i}{\varphi' a_i} = \lambda(a_i, z_k), \text{ naar i } z_k \text{ sættes } x = a_i,$$

idet θz_k er den Factor i φx, der forsvinder naar $x = a_i$. Altsaa giver Ligningen (1.), naar denne Værdi indsættes og naar man erindrer, at, efterdi $\lambda(x, z)$ ikke indeholder y, er

$$\int \frac{fx}{\varphi x} dy = \lambda(x, z_1) \log \theta z_1 + \lambda(x, z_2) \log \theta z_2 + \lambda(x, z_3) \log \theta z_3 + \ldots$$
$$+ \lambda(x, z_m) \log \theta z_m,$$

Summen $\psi a_1 + \psi a_2 + \ldots + \psi a_n$ af et Antal n af transcendente Functioner af Formen

$$\psi a_i = \int \frac{\lambda\,(a_i\, z_k)}{a_i - x}\, d\, a_i.$$

Heraf udleder man ved Differentiation med Hensyn til x og ved at bemærke, at enhver rational Function af a_i kan sættes under Formen

$$A_0 + \frac{A_1}{(a_i - x_1)^{r_1}} + \frac{A_2}{(a_i - x_2)^{r_2}} + \ldots + \frac{A_\omega}{(a_i - x_\omega)^{r_\omega}},$$

hvor A_0, A_1, A_2, ... A_ω ere hele Functioner af a_i, Summen af n Transcendente af Formen

$$\psi a_i = \int \frac{\lambda\,(a_i,\, z_k)}{\nu\,(a_i)}\, d\, a_i$$

ganske paa samme Maade, som dette i et specielt Tilfælde er udfört af *Abel* i hans Afhandling i *Crelles* Journal III p. 319—20.

Ifald to eller flere af Störrelserne a_1, a_2, ...a_n ere hinanden lige, ville $\varphi\, x$ og $f\, x$ faae en fælleds Divisor; t. Ex. naar $\varphi\, x$ indeholder en Factor $(x - a_i)^{\mu_i + 1}$, saa vil $f\, x$ indeholde Factoren $(x - a_i)^{\mu_i}$ og Anvendelsen af Ligningen (2.) vil da indtræde, hvilket ogsaa stemmer med hvad *Abel* har viist i den nys citerede Afhandling p. 317—18.

De Transcendente, som denne Afhandling angaaer, og som sædvanligen kaldes de *Abelske* Transcendente, ere indbefattede under fölgende mere almindelige Form

$$\psi a_i = \int \frac{\lambda\, a_i}{(a_i - x)\, z_k}\, d\, a_i,$$

hvor λ betegner en heel Function. Disse kunne i et enkelt Tilfælde summeres lettere. Er nemlig z_k af Formen $c_k\,\Delta$, hvor c_k er constant og Δ en Function af x, saa vil Functionen

$$\lambda\, x \,.\, \left\{\frac{\theta'\, z_1}{z_1\, \theta\, z_1} + \frac{\theta'\, z_2}{z_2\, \theta\, z_2} + \frac{\theta'\, z_3}{z_3\, \theta\, z_3} + \ldots + \frac{\theta'\, z_m}{z_m\, \theta\, z_m}\right\}$$

naar den er bragt til eens Benævning blive en med Hensyn til x rational Brök, hvilken vil kunne forkortes med Δ^m, saafremt

$$z_2 z_3 \ldots z_m + z_1 z_3 \ldots z_m + \ldots = 0$$

eller, hvad der er det samme, saafremt Ligningen $Z = 0$ mangler det næstsidste Led. Sætter man altsaa denne rationale Brök $= \frac{fx}{\varphi x}$, saa kan man tage

$$\varphi x = \theta z_1 \cdot \theta z_2 \cdot \theta z_3 \ldots \theta z_m$$

ligesom för. Dersom $Z = z^m - p$, saa ere hine Betingelser opfyldte, og man har da, idet $1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{m-1}$ ere Rödderne af Ligningen $z^m - 1 = 0$ og $\Delta = \sqrt[m]{p}$,

$$z_k = \alpha^k \Delta.$$

Man erholder saaledes Summen af n Transcendente af Formen

$$\psi a_i = \alpha^{-k} \int \frac{\lambda a_i}{(a_i - x)\Delta} d a_i,$$

hvilket er det Theorem af *Abel*, som findes i den oftnævnte Journal VI p. 78, og som jeg i min foregaaende Afhandling har beviist. Er $m = 2$, saa falder man tilbage paa de elliptiske og ultraelliptiske eller *Abelske* Transcendente.

Antager man i den almindelige Sætning $\theta z = z - y$, eller $\theta z = q_1 z + q_2$, saa har man, med Tilföielse af Udtrykket for Summen, de Theoremer, som *Poisson* har angivet i den ovenanförte Afhandling. Denne forudsætter imidlertid Coefficienterne i Ligningen $Z = 0$ blot rationale, ikke, som ovenfor er antaget, tillige hele; men hiin Forudsætning föres efter bekjendte Regler let tilbage til denne.